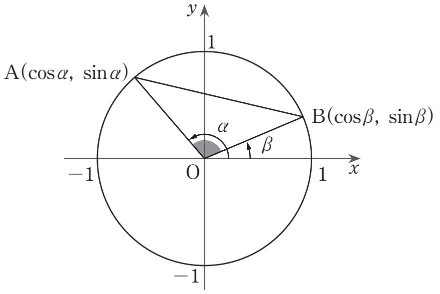
第 11 講　加法定理

PART1　正弦・余弦の加法定理

要点 ①　正弦・余弦の加法定理

ここでは，$\sin(\alpha+\beta)$ のように，角が 2 つの角の和 $\alpha+\beta$ や差 $\alpha-\beta$ で表された三角関数(正弦，余弦)を，それぞれの角の三角関数 $\sin\alpha$，$\sin\beta$，$\cos\alpha$，$\cos\beta$ で表す。

右図の単位円において，角 α，角 β の動径をそれぞれ OA，OB とすると，
A$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，B$(\cos\beta,\ \sin\beta)$ である。



線分 AB の長さを 2 通りの方法で表す。
2 点間の距離の公式より

$$\begin{aligned}AB^2&=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2\\&=\cos^2\beta-2\cos\beta\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\beta\sin\alpha+\sin^2\alpha\\&=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\qquad\cdots\cdots\ ①\end{aligned}$$

$\angle AOB=\alpha-\beta$ より，△OAB で余弦定理を用いて

$$AB^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)\qquad\cdots\cdots\ ②$$

①，②より　$2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$

よって，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$　……　(i)

(i)において，β を $-\beta$ におき換えると

$$\cos\{\alpha-(-\beta)\}=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ より

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\qquad\cdots\cdots\ \text{(ii)}$$

(i)において，α を $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ におき換えると

$$\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right\}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$

ここで，$\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right\}=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}=\sin(\alpha+\beta)$，

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$，$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ より

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots \quad \text{(iii)}$$

(iii)において，β を $-\beta$ におき換えると

$$\sin\{\alpha+(-\beta)\}=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ より

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots \quad \text{(iv)}$$

(i)～(iv)より，以下の定理が成り立つ。

正弦・余弦の加法定理

1 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

2 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

3 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

4 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

例 $\sin 105^\circ=\sin(\qquad\qquad)$

$=$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cos 15^\circ=\cos(\qquad\qquad)$

$=$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

1 α は第 1 象限の角，β は第 3 象限の角であるとする。$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\beta=-\frac{12}{13}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin(\alpha+\beta)$　　(2) $\cos(\alpha+\beta)$

(3) $\sin(\alpha-\beta)$　　(4) $\cos(\alpha-\beta)$

Point Pickup

正弦・余弦の加法定理

1 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

2 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

3 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

4 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

正弦・余弦の加法定理，および $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用して，角が和・差で表された三角関数(正弦・余弦)の値を求めることができる。

第11講 PART1 確認問題

α は第 1 象限の角，β は第 2 象限の角であるとする。

$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

1 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$

2 $\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$

3 $\sin(\alpha-\beta)=-\dfrac{\boxed{\text{カキ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$

4 $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{スセ}}}$

第11講　加法定理

PART1 正弦・余弦の加法定理

1 α は第 1 象限の角，β は第 3 象限の角であるとする。$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{12}{13}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin(\alpha+\beta)$　　(2) $\cos(\alpha+\beta)$

(3) $\sin(\alpha-\beta)$　　(4) $\cos(\alpha-\beta)$

[解答]

α は第 1 象限の角であるから　$\cos\alpha>0$

よって　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

β は第 3 象限の角であるから　$\sin\beta<0$

よって　$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{12}{13}\right)^2}=-\dfrac{5}{13}$

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{12}{13}\right)+\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{5}{13}\right)=-\dfrac{63}{65}$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{12}{13}\right)-\dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{5}{13}\right)=-\dfrac{16}{65}$

(3) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{12}{13}\right)-\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{5}{13}\right)=-\dfrac{33}{65}$

(4) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{12}{13}\right)+\dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{5}{13}\right)=-\dfrac{56}{65}$

第 11 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：5，イ：5

[解説]

α は第 1 象限の角であるから　$\cos\alpha>0$

よって　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

β は第 2 象限の角であるから　$\sin\beta>0$

よって　$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

したがって

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$ [A]

$$=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{4}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

[A]　正弦の加法定理
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

2

[正解] ウ：2，エ：5，オ：5

[解説]

$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ であるから

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$ [B]

$$=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)-\frac{3}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

[B]　余弦の加法定理
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

3 [正解] カキ：11，ク：5，ケコ：25

[解説]

$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ であるから

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$ [C]

$$=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)-\frac{4}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$=-\frac{\mathbf{11}\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{25}}$$

[C]　正弦の加法定理
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

4 [正解] サ：2，シ：5，スセ：25

[解説]

$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ であるから

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$ [D]

$$=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{3}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$=\frac{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{25}}$$

[D]　余弦の加法定理
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$